Элементы математического анализа в задачах по физике для 11 класса

Ниже приводится список сведений из области математического анализа, которые желательно знать для успешного решения задач Московской физической олимпиады. Математический аппарат, используемый в авторских решениях задач олимпиады, не выходит за рамки, схематично намечаемые этим списком. При этом в большинстве случаев авторы стремятся при составлении задач обойтись средствами элементарной математики.

1. Последовательности

Факториал $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)$. Числовые последовательности $\{a_n\}$. Числа Фибоначчи $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Ограниченные и монотонные последовательности. Предел числовой последовательности — на качественном уровне: $a_n \to A$, если $n \to \infty$. Второй замечательный предел: при $n \to \infty$ справедливо соотношение

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e, \quad e = 2{,}718281828\ldots$$

Формула n-го члена арифметической прогрессии

$$a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$$

и формула суммы первых n членов

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = a_1 n + d\frac{(n-1)n}{2}.$$

Формула n-го члена геометрической прогрессии

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

и формула суммы первых n членов

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S = \frac{b_1}{q - 1}.$$

2. Предел функции и производная функции

Функциональная зависимость. Предел функции при $x \to \infty$ — на качественном уровне. Примеры ($x \to \infty$):

$$\frac{1}{x^n} \to 0,\ n > 1; \qquad \frac{ax+b}{cx+d} \to \frac{a}{c}.$$

Предел функции в точке — на качественном уровне. Примеры при $x \to 0$:

$$\frac{ax+b}{cx+d} \to \frac{b}{d}; \qquad \frac{\sin x}{x} \to 1.$$

Приращение функции. Определение производной функции $f(x)$ в точке x_0:

$$f'(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \Delta x \to 0; \qquad f'(x) \equiv \frac{df}{dx}.$$

Дифференциал функции $df = f'(x)dx$ как линейная часть приращения функции. Геометрический смысл производной — тангенс угла наклона касательной к графику $f(x)$, проведённой в точке x_0. Уравнение касательной к графику функции $f(x)$, проведённой в точке x_0

$$y(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Физический смысл производной, примеры — определения скорости, ускорения, тока:

$$v_x(t) = x'(t), \qquad a_x(t) = v_x'(t), \qquad i(t) = q'(t).$$

Производные элементарных функций:

$$(kx)' = k, \quad (x^n)' = nx^{n-1}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Производные суммы, произведения и частного:

$$(u+v)' = u' + v', \quad (uv)' = u'v + v'u, \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + v'u}{v^2}.$$

Производная сложной функции

$$f(g(x))' = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}.$$

Примеры дифференцирования сложных функций:

$$(x^2(t))' = 2xx', \qquad (\sin \omega t)' = \omega \cos(\omega t).$$

Вторая производная

$$f(x)'' = \frac{df'}{dx} = \frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Физический смысл второй производной, примеры — ускорение и ЭДС индукции:

$$a_x(t) = x''(t), \qquad \mathscr{E}_i = -L\frac{di}{dt} = -Lq''(t).$$

3. Свойства и графики функций

Свойства функций: четность и нечетность, возрастание и убывание, нули и промежутки знакопостоянства, наибольшее и наименьшее значение. Исследование функций. Определение точек экстремума с помощью производной. Отображение свойств функций на графике. Преобразования графиков функций: сдвиги, растяжения, симметрия относительно осей координат и относительно прямой $y = x$. Парабола и гипербола. Координаты вершины параболы $y(x) = ax^2 + bx + c$:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = -\frac{b^2}{4a} + c.$$

Построение графиков кусочно–заданных функций. Сложная функция. Графики дробно–линейных функций вида $y(x) = \dfrac{a+bx}{c+dx}$, уравнения асимптот:

$$x = -\frac{c}{d}, \qquad y = \frac{b}{d}.$$

График функции вида $y(x) = ax + \dfrac{b}{x}$. Координаты точек экстремума:

$$x_0 = \pm\frac{b}{a}, \qquad y_0 = \pm 2\sqrt{ab}$$

и уравнения наклонной и вертикальной асимптот:

$$y(x) = ax, \qquad x = 0.$$

Взаимно обратные функции и их графики, например: x^n и $x^{\frac{1}{n}}$, $\sin x$ и $\arcsin x$. Графики гармонических периодических функций, координаты нулей и точек экстремума. Графики функций, заданных параметрически. Некоторые кривые, заданные параметрически. Окружность

$$x(t) = R\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad y(t) = R\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Эллипс

$$x(t) = a\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad y(t) = b\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Циклоида

$$x(t) = vt - R\sin(\omega t), \qquad y(t) = R - R\cos(\omega t).$$

Фигуры Лиссажу

$$x(t) = a\sin(\alpha t + \varphi_0), \qquad y(t) = b\cos(\beta t).$$

4. Экспонента и логарифм

Натуральный логарифм как площадь, ограниченная графиком гиперболы $f(x) = \dfrac{1}{x}$ и прямыми $x = 1$, $x = a$

$$\ln a = S(1, a).$$

Производная логарифмической функции

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

и график логарифмической функции. Свойства натуральных логарифмов:

$$\ln a + \ln b = \ln ab, \qquad \ln a - \ln b = \ln\frac{a}{b}, \qquad \ln a^n = n\ln a.$$

Определение числа e (числа Эйлера)

$$\ln e = 1, \qquad e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828\ldots$$

«2» и «7» и два раза год рождения Льва Толстого. Экспоненциальная функция (экспонента) как обратная к натуральному логарифму

$$\ln y = x \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^x.$$

График экспоненты. Производная экспоненты

$$(e^x)' = e^x.$$

5. Приближённые вычисления

Разложение дифференцируемых функций в степенной ряд. Приближённые равенства для элементарных функций вблизи $x = 0$ с точностью до линейных по x слагаемых:

$$(1+x)^n \approx 1 + nx, \quad \sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1, \quad \operatorname{tg} x \approx x, \quad e^x \approx 1 + x, \quad \ln(1+x) \approx x.$$

Примеры вычислений в линейном по x приближении:

$$(1+ax)(1+bx) \approx 1 + (a+b)x, \quad \frac{1+x}{1-x} \approx 1 + 2x, \quad \sin(\alpha + x) \approx x\sin\alpha + \cos\alpha,$$

$$\frac{1-x}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{3x}{2}, \quad x\cos x \approx x, \quad \frac{\operatorname{tg} x}{x} \approx 1, \quad \frac{x}{e^x} \approx x, \quad \frac{\ln(1+x)}{x} \approx 1.$$

Тригонометрические функции в квадратичном приближении:

$$\sin x \approx x, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{tg} x \approx x.$$

6. Интегрирование

Интеграл Римана, предел интегральных сумм на качественном уровне. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $a \leq x \leq b$, отрезок разбит на N ($N \gg 1$) маленьких отрезков шириной Δx, тогда при $\Delta x \to 0$

$$\sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Примеры задач, сводящихся к интегрированию:

$$x(t_2) - x(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} v_x(t)dt, \quad A_{12} = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x)dx, \quad m = S \cdot \int\limits_0^L \rho(x)dx.$$

Определённый интеграл (с пределами a и b) от функции $y(x)$ численно равен площади фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и прямой $y = 0$. Интеграл от линейной функции как площадь трапеции

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} (kx + b)dx = (x_2 - x_1)\left(k\frac{x_1 + x_2}{2} + b\right).$$

7. Дифференциальные уравнения

Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям. Разрядка конденсатора через резистор и движение по инерции в вязкой среде. Уравнение

$$\frac{df}{dt} = -kf, \quad f(0) = f_0$$

имеет решение

$$f(t) = f_0 e^{-kt}.$$

Ток в цепи с катушкой, источником ЭДС и резистором. Уравнение

$$\frac{df}{dt} = -kf + b, \quad f(0) = 0$$

имеет решение

$$f(t) = \frac{b}{k}\left(1 - e^{-kt}\right).$$

Адиабатический и политропический процессы. Уравнение

$$\frac{dy}{y} = k\frac{dx}{x}$$

определяет семейство кривых, удовлетворяющих соотношению

$$y = \frac{C}{x^k},$$

где C — параметр. Свободные малые колебания с линейной по обобщённой координате x возвращающей силой. Уравнение колебаний

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

имеет решение

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t),$$

где C_1 и C_2 — параметры, значения которых определяются после подстановки решения в уравнения начальных условий:

$$x(0) = x_0, \quad v_x(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega}.$$

Альтернативный вид решения уравнения колебаний с теми же начальными условиями

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = -\frac{v_0}{\omega x_0}.$$

Уравнение

$$x'' + \omega^2 x = f, \quad f = \mathrm{const},$$

описывающее колебания под действием постоянной внешней силы, сводится к уравнению колебаний, рассмотренному выше, заменой

$$y = y_1 + \frac{f}{\omega^2}.$$